AN14

École Centrale de Paris, École Centrale de Lyon, École supérieure d'électricité, École supérieure d'optique Concours commun Centrale - Supélec

Première épreuve
Options MP'

6655

Dans tout le problème f désigne une application de $]\,0\,,+\infty\,[$ dans $]\,0\,,+\infty\,[$.

PARTIE I.

Dans cette partie on suppose que f est continue, décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, k et n entiers, on pose :

$$c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{C}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x)$$

$$\mathrm{d}_k(x) = f(x+k+1) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \mathrm{D}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{d}_k(x)$$

1° ***a)*** Interpréter géométriquement $c_k(x)$ et $\mathrm{C}_n(x)$.

b) Établir l'inégalité $c_k(x) \leq f(x+k) - f(x+k+1)$.
En déduire que la série de terme général $c_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$\mathrm{C}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(x)$$

vérifie l'inégalité $\mathrm{C}(x) \leq f(x)$.

2° Après en avoir justifié l'existence, déterminer $\mathrm{C}(x)$ dans chacun des deux cas suivants :

a) $f(x) = e^{-x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$

3° Montrer que la série de terme général $d_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et exprimer sa somme

$$\mathrm{D}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{d}_k(x)$$

au moyen de $\mathrm{C}(x)$ et de $f(x)$.

4° *a)* Montrer que la fonction $C : x \to C(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

b) Étudier le comportement de C en $+\infty$.

5° On suppose **dans cette seule question** que $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

a) Montrer que :

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

est négligeable devant $f(x)$ quand x tend vers 0.

b) En déduire que $C(x)$ et $f(x)$ sont équivalents quand x tend vers 0.

PARTIE II.

Dans cette partie, on conserve les hypothèses faites sur f dans l'introduction de la PARTIE **I**, auxquelles on ajoute l'hypothèse supplémentaire suivante : f est de classe $\mathscr{C}^1$ et convexe, c'est-à-dire ***à dérivée f' croissante***.

1° Montrer que $f'(x)$ a une limite, que l'on précisera, lorsque x tend vers $+\infty$.

2° Montrer que la fonction C est de classe $\mathscr{C}^1$ et décroissante (on pourra utiliser la fonction $g = f'$).

3° Pour $x > 0$ et k entier, on pose :

$$u_k(x) = \frac{1}{2}[f(x+k) + f(x+k+1)] - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt\ , \quad k \geq 0$$

$$v_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt\ , \qquad k \geq 1$$

a) Interpréter géométriquement $u_k(x)$ et $v_k(x)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$ les séries de termes généraux $u_k(x)$ et $v_k(x)$ sont convergentes et exprimer leurs sommes

$$U(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{et} \quad V(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} v_k(x)$$

au moyen de $C(x)$ et de $f(x)$.

4° Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\frac{1}{2}f(x) \leq C(x) \leq f(x) - \int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt\,.$$

5° *a)* Montrer que, quand x tend vers $+\infty$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $f'(x)$ est négligeable devant $f(x)$.

(ii) $f(x)$ et $f(x+1)$ sont équivalents.

b) Les conditions *(i)* et *(ii)* étant supposées remplies, montrer que, quand x tend vers $+\infty$, on a :

$$C(x) \sim \frac{1}{2} f(x)$$

c) Donner un exemple de fonction f satisfaisant à ces conditions.

6° *a)* Pour $f(x) = e^{-x}$, que peut-on dire du rapport $\dfrac{C(x)}{f(x)}$?

b) Montrer que, pour tout $m \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$, il existe une fonction f telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{C(x)}{f(x)} = m$$

PARTIE III.

Dans cette partie, où f vérifie les hypothèses de l'introduction de la PARTIE I, on utilisera, sans le démontrer, le résultat classique suivant :
la suite de terme général

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \quad (n \geq 1)$$

admet une limite finie λ $(0 < \lambda < 1)$, appelée constante d'Euler, lorsque n tend vers $+\infty$.
On pose, pour $x > 0$, $k \geq 0$, $n \geq 0$, k et n entiers :

$$\gamma_k(x) = xf((k+1)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \Gamma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \gamma_k(x)$$

$$\delta_k(x) = xf((k+2)x) - \int_{(k+1)x}^{(k+2)x} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \Delta_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k(x)$$

1° *a)* Interpréter géométriquement $\gamma_k(x)$ et $\Gamma_n(x)$.

b) En posant $f_x(u) = xf(ux)$, montrer que la série de terme général $\gamma_k(x)$ converge pour tout $x > 0$ et que sa somme

$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_k(x)$$

est une fonction continue de x sur $]0, +\infty[$.

2° Montrer que la série de terme général $\delta_k(x)$ converge pour tout $x > 0$.
Calculer sa somme

$$\Delta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k(x)$$

en fonction de $\Gamma(x)$ et de $f(x)$.

3° On suppose dans cette question que $xf(x)$ a une limite finie, A, quand x tend vers 0.
Montrer que $\Gamma(x)$ tend vers $\mathrm{A}\lambda$ quand x tend vers 0.

4° On suppose dans cette question que

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

a) Montrer que

$$\Gamma(x) = -\ln(1-e^{-x}) - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que

$$\ln x + \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

admet une limite, que l'on déterminera, lorsque x tend vers 0.

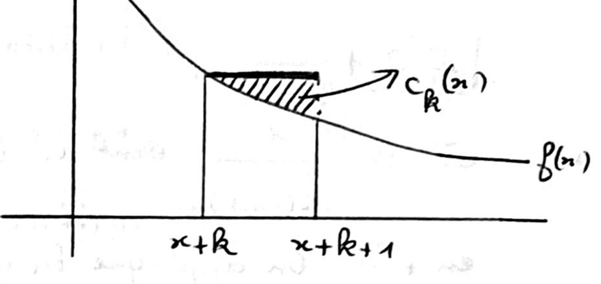
c) Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-(x+k)}}{x+k} \quad \text{converge normalement sur } [0, +\infty[.$$

d) Donner un développement asymptotique à trois termes significatifs de $\mathrm{C}(x)$ (C a été définie en **I**) lorsque x tend vers 0.

Centrale - Supélec 93

I.1.a



$c_k(x)$ est l'aire hachurée sur la figure ci-contre. $C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x)$ sera l'aire située entre la courbe représentative de la fonction en escalier φ : $[x, x+n+1] \to \mathbb{R}$ défini par

$$\forall k \quad \forall y \in [x+k, x+k+1] \qquad \varphi(y) = f(x+k)$$

, entre le graphe de f et les 2 droites verticales $X = x$ et $X = x+n+1$.

I.1.b

* La décroissance de f permet d'écrire :

$$\forall t \in [x+k, x+k+1] \qquad f(x+k+1) \leq f(t) \leq f(x+k)$$

d'où en intégrant :

$$f(x+k+1) \leq \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \leq f(x+k)$$

$$0 \leq c_k(x) = f(x+k) - \int_{x+k}^{x+k+1} f(t)\,dt \leq f(x+k) - f(x+k+1)$$

* Sommons les inégalités précédentes :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x) \leq \sum_{k=0}^{n} f(x+k) - f(x+k+1) = f(x) - f(x+n+1) \leq f(x)$$

$\sum_k c_k(x)$ est donc une série à termes positifs, majorée par $f(x)$.
Elle convergera vers $C(x)$ et l'on aura (passage à la limite) :

$$\forall x>0 \qquad C(x) \leq f(x)$$

I.2.1

e^{-x} et $\dfrac{1}{x(x+1)}$ sont continues, positives décroissantes et de limite 0 en $+\infty$. On applique la question précédente.

a) $$c_k(x) = e^{-x-k} - \int_{x+k}^{x+k+1} e^{-t}\,dt = e^{-x-k} - \left[\frac{e^{-t}}{-1}\right]_{x+k}^{x+k+1} = e^{-(x+k+1)}$$

donc $$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(x+k+1)} = e^{-(x+1)} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = e^{-x-1} \cdot \frac{1}{1-e^{-1}}$$

$$\boxed{C(x) = \frac{e^{-x}}{e-1}}$$

b) On peut recommencer un calcul semblable au a), avec des séries, ou bien conserver l'intégrale dans l'expression de $C_n(x)$:

$$c_k(x) = \frac{1}{(x+k)(x+k+1)} - \int_{x+k}^{x+k+1} \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

$$C_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1}\right) - \int_{x}^{x+n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} + \ln x - \ln(x+1) - \ln(x+n+1) + \ln(x+n+2)$$

$$= \frac{1}{x} + \ln\frac{x}{x+1} - \underbrace{\frac{1}{x+n+1}}_{\to 0} + \underbrace{\ln\frac{x+n+2}{x+n+1}}_{\to 0} \qquad (n \to +\infty)$$

D'où $C(x) = \lim_{n \to +\infty} C_n(x) = \boxed{\frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x+1}}$

I.3 $\quad c_k(x) - d_k(x) = f(x+k) - f(x+k+1)$

En sommant pour k variant de 0 à n, on obtient :

$$C_n(x) - D_n(x) = f(x) - f(x+n+1)$$

$$D_n(x) = C_n(x) - f(x) + f(x+n+1)$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} C_n(x) = C(x)$ et $\lim_{n \to +\infty} f(x+n+1) = 0$, on aura :

$$\lim D_n(x) = C(x) - f(x)$$

La série $\sum_{k \geq 0} d_k(x)$ converge et $\boxed{D(x) = C(x) - f(x)}$

I.4.a

$$|C(x) - C_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} f(x+k) = f(x+n+1) \leq f(n)$$

et $f(n)$ tend vers 0 indépendamment de x. Cela prouve la convergence uniforme de $C_n(x)$ vers $C(x)$ pour $x > 0$.

Comme $c_k(x)$ est continue en x pour tout k, $C_n(x)$ sera continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $C(x)$ sera continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme la limite uniforme de la suite de fonctions continues $(C_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

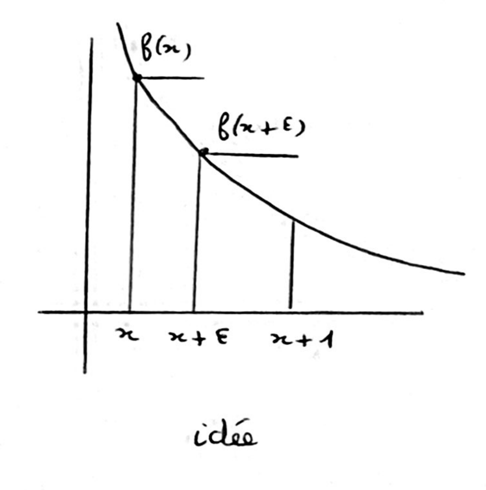
I.4.b

<u>1-solution :</u> De $0 \leq C(x) \leq f(x)$ on déduit par passage à la limite $\lim_{x \to +\infty} C(x) = 0$

<u>2-solution :</u> $(C_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $C(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour n tendant vers $+\infty$, et $\lim_{x \to +\infty} C_n(x) = 0$ pour tout n. Le Th. d'interversion des limites assure que

$$\lim_{x \to +\infty} C(x) = 0$$

I.5.a



idée

Soit $\varepsilon > 0$. On peut supposer $\varepsilon < 1$.
On a :

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt = \underbrace{\int_x^{x+\varepsilon} f(t)\,dt}_{\leq \varepsilon f(x)} + \underbrace{\int_{x+\varepsilon}^{x+1} f(t)\,dt}_{\leq (1-\varepsilon) f(x+\varepsilon)}$$

puisque f est décroissante. Par suite :

$$0 \leq \frac{\int_x^{x+1} f}{f(x)} \leq \varepsilon + (1-\varepsilon)\frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \qquad (*)$$

ε étant fixé, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} = 0$ car $\lim_{x \to 0} f(x+\varepsilon) = f(\varepsilon)$ et $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, donc :

$$\exists \eta \quad 0 \leq x < \eta \implies 0 \leq \frac{f(x+\varepsilon)}{f(x)} \leq \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$$

et (*) entraine

$$0 \leq \frac{\int_x^{x+1} f}{f(x)} \leq 2\varepsilon$$

dès que $0 \leq x < \eta$. On a prouvé que $\int_x^{x+1} f(t)\,dt = o(f)$.

I.5.b On a

$$C(x) = f(x) - \int_x^{x+1} f(t)\,dt + \sum_{k \geq 1}^{\infty} c_k(x) \qquad (*)$$

Si $k \geq 1$, $x \longmapsto c_k(x)$ est une fonction continue sur $[0, +\infty[$. La convergence de $\sum_{k\geq 1} c_k(x)$ étant uniforme, $x \longmapsto \sum_{k \geq 1} c_k(x)$ sera continue sur $[0, +\infty[$ donc majorée par une constante au voisinage de 0. Donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sum_{k\geq 1} c_k(x)}{f(x)} = 0$.

Compte tenu de I.5.b, (*) entraine :

$$C(x) = f(x) + o(f(x))$$

ie $$C(x) \underset{0}{\sim} f(x)$$

II.1

f décroît, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) \leq 0$. (preuve : si l'on avait $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ avec $f'(x_0) > 0$, f' étant continue on pourrait trouver η et un intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ sur lequel f' soit > 0. Mais f serait strictement croissante sur cet intervalle. C'est absurde.)

f' est croissante, majorée par 0, donc converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_-$.

Si l'on avait $\ell < 0$, le Th. des accroissements finis montrerait pour $x_0 < x$:

$$f(x) - f(x_0) < \sup_{[x_0,x]} f'(t)\,(x - x_0) \leq \underbrace{\ell\,(x - x_0)}_{\to -\infty \ (x \to +\infty)}$$

ce qui entraine $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, absurde. **Ccl** : $\lim_{x\to+\infty} f' = 0$

II.2 $C(x) = \sum_{k\geq 0} c_k(x)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et chaque fonction c_k est derivable. On a :

$$C_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k'(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} f'(x+k)\right) - f(x+n+1) + f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} f'(x+k) - \int_x^{x+n+1} f'(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} g(x+k) - \int_x^{x+n+1} g(t)\,dt \qquad (*)$$

On peut utiliser la partie I avec $-g$ à la place de f. $-g$ est bien croissante, continue et tend vers 0 si $x \to +\infty$. Vu $(*)$ et I.4, on obtient :

$(C_n'(x))_n$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$

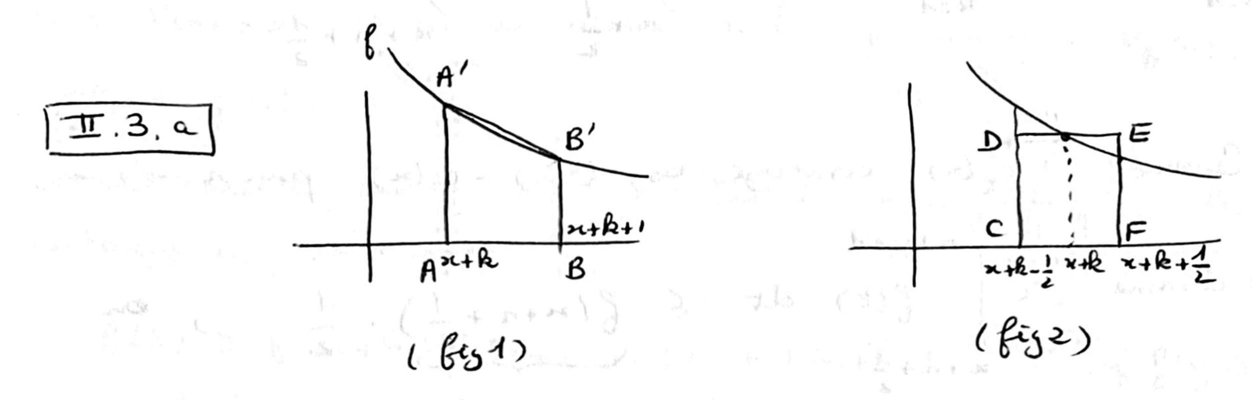
On applique le Théorème :

Th : (f_n) suite de fonctions de classe C^1, $f_n : I \to \mathbb{R}$, I int. de $\mathbb{R}$. Si
1) (f_n) converge vers f sur I
2) (f_n') converge uniformément vers g sur I,

Alors (f_n) converge uniformément sur toute partie bornée de I, f est de classe C^1 et $f' = g$.

(*) montre que $C'_n(x) \leq 0$ pour tout n, donc en passant à la limite $C'(x) \leq 0$, et C sera décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

II.3.a



(fig 1) (fig 2)

$u_k(x)$ est la différence entre l'aire du trapèze $AA'B'B$ et l'aire sous la courbe de f pour $t \in [x+k, x+k+1]$ (fig. 1)

$v_k(x)$ est la différence entre l'aire du rectangle $CDEF$ et la courbe de f pour $t \in [x+k-\frac{1}{2}, x+k+\frac{1}{2}]$. (fig. 2)

II.3.b

* $\frac{1}{2}(c_k(x) + d_k(x)) = u_k(x)$ donc $\sum u_k(x)$ sera convergente vers :

$$U(x) = \frac{1}{2}(C(x) + D(x)) \underset{I.3}{=} \boxed{C(x) - \frac{1}{2} f(x)}$$

* $$c_k(x) - v_k(x) = \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f - \int_{x+k}^{x+k+1} f$$

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k(x) - v_k(x)) = \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+n+\frac{1}{2}} f - \int_{x+1}^{x+n+1} f$$

$$= \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f - \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f + \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} c_k(x)$ converge vers $C(x) - c_0(x)$ pour $n \to +\infty$,

et comme $0 \leq \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(t)\, dt \leq \underbrace{f(x+n+\frac{1}{2})}_{\to 0\ (n\to+\infty)} \cdot \frac{1}{2}$, on

aura $\lim_{n\to+\infty} \int_{x+n+\frac{1}{2}}^{x+n+1} f(t)\, dt = 0$ et l'égalité précédente prouve que

$\sum_{k\geq 1} v_k(x)$ converge vers :

$$V(x) = C(x) - c_0(x) - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f$$

$$= C(x) - f(x) + \int_{x}^{x+1} f - \int_{x+\frac{1}{2}}^{x+1} f$$

$$\boxed{V(x) = C(x) - f(x) + \int_{x}^{x+\frac{1}{2}} f(t)\, dt}$$

II. 4

* f est convexe donc la corde [A'B'] de la fig. 1 est au dessus de la courbe de f, ce qui entraîne $u_k(x) \geq 0$ pour tout k et :

$$U(x) \geq 0 \iff C(x) \geq \frac{1}{2} f(x)$$

d'après II.3.

* Prouver que $C(x) \leq f(x) - \int_x^{x+\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ revient à prouver que $V(x) \leq 0$, ce qui est assuré si l'on prouve que $v_k(x) \leq 0$ pour tout $k \geq 1$.

f étant convexe, son graphe est situé sur n'importe laquelle de ses tangentes, et donc :

$$f(t) \geq f'(x+k)\,(t-(x+k)) + f(x+k) \qquad \text{(cf fig. 2)}$$

$$\int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \geq f'(x+k) \underbrace{\int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} t-(x+k)\;dt}_{=0 \text{ (le calculer)}} + f(x+k)$$

$$v_k(x) \doteq f(x+k) - \int_{x+k-\frac{1}{2}}^{x+k+\frac{1}{2}} f(t)\,dt \leq 0$$

CQFD.